CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAU
SESSION DE MAI 2014
EPREUVE DE MATHEMATIQUE

FILIERES : ARCHITECTURE, URBANISME ET GESTION URBAINE

EXERCICE 1

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ? Calculer I.
2) Soit f la fonction ; $f : \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

Démontrer que f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout x appartenant à cet intervalle $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

En déduire du calcul précédent une relation entre I et J , puis calculer J.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormal , on considère les quatre points suivants : A$(-2; 3)$; B$(2; 1)$;C$(2; 4)$; D$(5; 2)$.

1) Justifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
2) Déterminer les coordonnées du point M intersection des droites (AB) et (CD) .
3) Déterminer les coordonnées de l'unique point B′ vérifiant que le point M soit le milieu du segment $[BB']$.

Justifier que la droite (CD) est la médiatrice du segment $[BB']$.

EXERCICE 3

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x)\, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x)\, dx$

1) Calculer I_o et J_0.
2) Soit n un entier naturel non nul.
   a) En intégrant par partie I_n puis J_n prouver que I_n et J_n vérifient le système :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$

   b) En déduire pour tout n entier naturel non nul les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} J_n$.